Session 2003

BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE

SCIENCES ET TECHNOLOGIES INDUSTRIELLES

Génie Mécanique
Option A : Productique Mécanique
Option F : Microtechniques

Génie Énergétique

Génie Civil

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures **Coefficient : 4**

L'usage des calculatrices est autorisé pour cette épreuve.

Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.
Il sera tenu compte de la clarté des raisonnements et de la qualité de la rédaction dans l'appréciation des copies.

Dès que le sujet vous est remis assurez vous qu'il est complet, que toutes les pages sont imprimées.

Le formulaire officiel de mathématiques est distribué en même temps que le sujet.

Ce sujet nécessite deux feuilles de papier millimétré.

Exercice 1 *(4 points)*

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{u}\,,\,\vec{v})$ d'unité graphique 1 cm.

1) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation :

$$z^2 - 6z + 34 = 0.$$

2) Soient A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = 3 + 5\mathrm{i}$, $z_B = 3 - 5\mathrm{i}$ et $z_C = 4\mathrm{i}$.

a) Placer A, B et C dans le repère.

b) Calculer les modules des nombres complexes $z_A - 3$, $z_B - 3$ et $z_C - 3$. En déduire que les points A, B et C sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

c) Quelle est la nature du triangle ABC ?

3) Soit D le symétrique de A par rapport à C et E le symétrique de B par rapport à C. Placer les points D et E dans le repère. Montrer que $ABDE$ est un losange.

Exercice 2 *(5 points)*

1) Soit (E) l'équation différentielle $y' + 2y = 0$ où y est une fonction numérique définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

a) Résoudre l'équation (E).

b) Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 1$.

2) a) Calculer la valeur moyenne de f sur $[0\,;\,10]$.

b) Déterminer, en fonction de n, la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[n\,;\,n+1]$.

3) Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \dfrac{1}{2}\,(1 - \mathrm{e}^{-2})\mathrm{e}^{-2n}$ pour tout n entier positif ou nul.

a) Calculer la valeur exacte de u_0 , u_1 et u_2.

b) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

c) Déterminer la valeur exacte de la somme $u_0 + u_1 + \cdots + u_9$.

Problème *(11 points)*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{-3-2x}{\mathrm{e}^x}$. On appelle (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal d'unité graphique 1 cm.

Partie A : Étude de la fonction f.

1) a) Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

b) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

c) En déduire l'existence d'une asymptote à la courbe (C). On précisera son équation.

2) Calculer $f'(x)$, où f' désigne la fonction dérivée de f.

3) Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f

4) Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation d'inconnue x : $f(x) = 0$. En déduire, en fonction de x réel, le signe de $f(x)$.

5) Tracer la courbe (C) dans le repère indiqué.

Partie B : Détermination d'une primitive et calculs d'aire.

1) Montrer que la fonction F définie par $F(x) = \dfrac{2x+5}{\mathrm{e}^x}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2) a) Hachurer l'aire du domaine délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -\dfrac{3}{2}$ et $x = 5$.

b) Calculer la valeur, en cm^2, de cette aire, puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

3) a) Pour tout x de $\mathbb{R}$, on pose $g(x) = -f(x)$ et on appelle (Γ) la courbe représentative de la fonction g. Tracer la courbe (Γ) dans le même repère que la courbe (C).

b) Soit $A(\alpha)$ l'aire du domaine compris entre les courbes (C) et (Γ) et les droites d'équation $x = -\dfrac{3}{2}$ et $x = \alpha$ (où α est un réel positif donné). Calculer, en cm^2 et en fonction de α, la valeur de $A(\alpha)$.

c) Calculer la limite de $A(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$.